Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu
18.6.2014

1. (a) Seuraava matriisi on erään yhtälöryhmän matriisi. Mikä on tämän yhtälöryhmän ratkaisu?
$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
   (b) Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tutkitaan yhtälöryhmää
$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +ax_3 & = & 2 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & -1. \end{cases}$$
   Millä luvun a arvoilla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua? Voiko yhtälöryhmällä olla äärettömän monta ratkaisua?

2. Merkitään $\bar{w}_1 = (1, 2, 0)$, $\bar{w}_2 = (1, 1, -1)$ ja $\bar{w}_3 = (1, 4, 2)$. Halutaan selvittää, kuuluuko vektori $\bar{v} = (1, 1, 0)$ aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$. Millaista yhtälöä pitää tutkia? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan?

   Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan matriisi
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$
   Päättele matriisin perusteella, kuuluuko vektori $\bar{v}$ aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$.

3. (a) Miten määritellään kääntyvä matriisi?
   (b) Luettele erilaisia tapoja, joilla voidaan tarkistaa, onko matriisi kääntyvä.
   (c) Oletetaan, että matriisille A pätee $A^2 = O$. Osoita, että $A + I$ on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $A - I$.

4. Avaruudella $\mathbb{R}^2$ on kanta $\mathcal{B} = ((1, 2), (0, 1))$. Määritä vektorin $\bar{v} = (2, 3)$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen. Piirrä tilanteesta kuva ja selitä, kuinka koordinaatit näkyvät kuvassa.

5. Oletetaan, että vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ on yhdensuuntainen vektorin $\bar{w}$ kanssa. Osoita, että $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \operatorname{proj}_{\bar{u}}(\bar{v})$.