Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesätentti
8.8.2013

1. Tutkitaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Onko A kääntyvä?

   (b) Olkoon $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$?

2. (a) Seuraava matriisi on erään yhtälöryhmän matriisi. Mikä on tämän yhtälöryhmän ratkaisu?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   (b) Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tutkitaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +ax_3 & = & 2 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & -1. \end{cases}$$

   Millä luvun a arvoilla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua? Voiko yhtälöryhmällä olla äärettömän monta ratkaisua?

3. Virittävätkö vektorit $\bar{v}_1 = (1, 0, 2)$, $\bar{v}_2 = (1, -1, -1)$ ja $\bar{v}_3 = (1, -2, -4)$ avaruuden $\mathbb{R}^3$?

4. Taso T kulkee pisteiden $A = (1, 2, 0)$, $B = (0, 1, -1)$ ja $C = (2, 1, 0)$ kautta.

   (a) Etsi tasolle T normaali eli vektori, joka on kohtisuorassa tasoa vastaan.

   (b) Määritä tason normaalimuotoinen yhtälö eli muotoa $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ oleva yhtälö.

5. (a) Miten määritellään vapaa vektorijono?

   (b) Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{v}_3 \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$. Voiko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ olla vapaa?