

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesätentti
9.8.2012

1. Määritellään

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ a & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{missä } a \in \mathbb{R}.$$

a) Laske tulo AB .

b) Millä luvun a arvolla matriisi B on matriisin A käänteismatriisi?
Muista perustella vastauksesi.

2. Oletetaan, että vektoriavaruuden \mathbb{R}^3 aliavaruus W sisältää vektorit $[1 \ 0 \ 2]^T$ ja $[1 \ 2 \ 0]^T$. Osoita, että seuraavat vektorit kuuluvat aliavaruuteen W :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Mitkä seuraavista avaruuden \mathbb{R}^4 vektori joukoista ovat vapaita?

$$\text{a) } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{b) } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

4. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tutkitaan seuraavaa yhtälöryhmää:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +ax_3 & = & 2 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Millä luvun a arvoilla yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua? Voiko yhtälöryhmällä olla äärettömän monta ratkaisua?

5. Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{w} \in V$. Oletetaan lisäksi, että vektori joukko $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ on vapaa. Osoita, että $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{w}\}$ on vapaa, jos ja vain jos

$$\bar{w} \notin \text{span}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}.$$