

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesätentti
14.6.2012

1. Ratkaise Gaussin tai Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 = -4. \end{cases}$$

2. a) Osoita vastaesimerkillä, että ehto $(AB)^2 = A^2B^2$ ei päde kaikilla 2×2 -matriiseilla A ja B .
b) Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä $n \times n$ -matriiseja. Osoita, että $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. Onko joukko

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

vektoriavaruuden \mathbb{R}^4 kanta?

4. Näytä, että joukko

$$W = \{[x_1 - 2x_2 \quad 4x_2 \quad x_1]^T \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

on vektoriavaruuden \mathbb{R}^3 aliavaruus. Etsi aliavaruudelle W virittäjät.

5. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Olkoon matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kääntyvä. Osoita, että jos joukko $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ on vapaa, niin myös joukko $\{A\bar{v}_1, A\bar{v}_2, \dots, A\bar{v}_k\}$ on vapaa.