Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskoe 10.12.2015

Muista perustella kaikki vastauksesi huolellisesti.

1. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq 0$. Tällöin projektio $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ voidaan laskea kaavalla

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}.$$

   (a) Merkitään $\bar{w} = (-2, 1)$ ja $\bar{v} = (3, -4)$. Piirrä kuva vektoreista $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ ja $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$. Voit määrittää projektiovektorin joko laskemalla tai kuvan avulla.

   (b) Selitä omin sanoin, miten erotusvektori $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ liittyy projektion määritelmään.

2. (a) Onko jono $((0, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 0, -1))$ vapaa?

   (b) Tutkitaan vielä a-kohdan vektoreita. Kuvaile omin sanoin, miltä näyttää joukko

$$\text{span}((0, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 0, -1)).$$

   Tarkkoja perusteluja ei tarvita.

3. Anna esimerkki avaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruudesta, johon vektorit $(1, 1, 1, 0)$ ja $(0, -1, 3, 1)$ kuuluvat, mutta vektori $(-2, 2, 1, 5)$ ei kuulu.

4. Erään yhtälöryhmän matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

   missä a ja b ovat joitakin reaalilukuja. Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on?

5. (a) Miten määritellään kääntyvä matriisi?

   (b) Millä tavoin voi selvittää, onko matriisi kääntyvä? Listaa erilaisia tapoja.

   (c) Oletetaan, että neliömatriisille A pätee $A^2 = O$. Osoita, että $A + I$ on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $A - I$.

6. (a) Tiedetään, että matriisilla A on ominaisvektori $\bar{v} = (4, 2, -2)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $A\bar{v}$ ja mikä ei? Jos vektori voi olla $A\bar{v}$, mikä on siinä tapauksessa vektoria $\bar{v}$ vastaava ominaisarvo?

$$\bar{a} = (-2, -1, 1), \qquad \bar{b} = (3, 1, -1), \qquad \bar{c} = (2, 1)$$

   (b) Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?

      i. Matriisilla voi olla äärettömän monta eri ominaisvektoria.

      ii. Matriisilla voi olla äärettömän monta eri ominaisarvoa.