Laskettavuuden teoria
Kurssikoe 24.1.2013

Taneli Huuskonen

20. tammikuuta 2013

Ratkaisuissa **saa** käyttää lyhenteitä, jotka koskevat argumentin valintaa projektiofunktiolla sekä vakion muodostamista perusfunktioiden avulla. Esim. "virallisten" määritelmien mukaiset lausekkeet $\mathrm{Pr}^3_2(x, y, z)$ ja $s(s(z(x)))$ saa kirjoittaa muodossa y ja 2.

1. Osoita määritelmien perusteella, että predikaatti "x on parillinen" on primitiivirekursiivinen.

2. Osoita, että jokaisella äärettömällä rekursiivisesti lueteltavalla joukolla on ääretön rekursiivinen osajoukko. (Voit pitää tunnettuina kurssilla esitettyjä ehtoja sille, että joukko on rekursiivinen tai r.l.)

3. Mitkä seuraavista predikaateista ovat ratkeavia, mitkä osittain ratkeavia? Perustele vihjeenomaisesti (esim. sopivan kurssilla todistetun lauseen tai Churchin teesin mainitseminen riittää).

   (a) "φ_x on injektio",
   (b) "φ_x ei ole injektio",
   (c) "laskenta $P_x(2013)$ pysähtyy enintään x askeleessa",
   (d) "$\varphi_x(0) = \varphi_x(42)$".

4. Todista, että predikaatti "$\varphi_x(0) \simeq \varphi_x(42)$" ei ole osittain ratkeava. (Huomaa ero edellisen tehtävän d-kohtaan.)

5. Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{N}$ ja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sellainen totaali laskettava funktio, että kaikilla $x \in \mathbb{N}$ pätee $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. Osoita, että jos A on produktiivinen, niin myös B on produktiivinen.