1. KURSSIKOE
KOMPLEKSIANALYYSI I
29.10.2012

1.1. **Tehtävä.** (1) Etsi seuraavat argumentit valillä $(0, 2\pi]$

$$(a)\, \mathrm{Arg}_{(0,2\pi]}(z - \overline{z}) \qquad (b)\, \mathrm{Arg}_{(0,2\pi]}(z + \overline{z}) \qquad (c)\, \mathrm{Arg}_{(0,2\pi]}(z\overline{z}),$$

missä $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ siten, että $z \neq \overline{z}$ ja $z \neq -\overline{z}$.
(2) Määrä reaaliluvut x ja y siten, että

$$\frac{1}{2^{1000}}\left(\frac{1+5i}{2-3i}\right)^{2012} = x + iy\,.$$

1.2. **Tehtävä.** (1) Olkoon $f\, : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Osoita, että funktio $g(z) = \overline{z}f(z)$ on kompleksisesti derivoituva pisteessä z, jos ja vain jos $f(z) = 0$.
(2) Määrää ne pisteet, joissa $h(z) = \overline{z}\cos(iz)$ on kompleksisesti derivoituva.

1.3. **Tehtävä.** (1) Osoita, että jos sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenee pisteessä $z_1 \neq 0$, niin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenee itseisesti kiekossa $\mathbb{D}(0, |z_1|)$.
(2) Määrää seuraavien potenssisarjojen suppenemissäteet ja summat

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1}\,.$$

1.4. **Tehtävä.** (1) Etsi reaali -ja imaginaariosat funktiolle $\exp(\exp(z))$.
(2) Määrää kaikki kompleksiluvut z, joille $\exp(\sqrt{z}) = i$.
(3) Onko yhtälöllä $\tan z = i$ olemassa ratkaisua $z \in \mathbb{C}$?