

KOMPLEKSIANALYYSI I
18.12.2012

1. LOPPUKOE

1.1. **Tehtävä.** (1) Tutki seuraavien funktioiden analyyttisyyttä.

$$f(z) = \frac{z}{\bar{z} - 2012} \quad \text{ja} \quad g(z) = \bar{z}^3.$$

(2) Olkoot $a, x, y \in \mathbb{R}$. Voiko funktio $(x, y) \mapsto x^2 - axy + y^2$ olla analyyttisen funktion reaali- tai imaginaariosa kiekossa $\mathbb{D}(0, 1)$?

1.2. **Tehtävä.** (1) Osoita, että $\sin iz = i \sinh z$ kaikilla z .

(2) Määrää kaikki arvot luvuille $\log(\log i)$ ja $(1 - i)^{1-i}$.

1.3. **Tehtävä.** Olkoon $a \in \mathbb{C}$ siten, että $|a| \leq 1$. Osoita, että polynomille

$$P(z) = \frac{a}{2} + (1 - |a|^2)z - \frac{\bar{a}}{2}z^2$$

pätee, että $|P(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in \overline{\mathbb{D}}(0, 1)$.

1.4. **Tehtävä.** Määrää integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

1.5. **Tehtävä.** (1) Muodosta Möbius-kuvaus g siten, että $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g(2) = i$.

(2) Määrää Möbius-kuvauksen $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ alueesta $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ antama kuva.