Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I, loppukoe.
4.3.2014

1. Tarkastellaan potenssisarjaa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Määrää sarjan suppenemissäde, kun jokaisella $k \in \mathbb{N}$ pätevät ehdot $a_{2k} = 3^k$ ja $a_{2k+1} = \log k$.

2. Osoita, että funktio $f(z) = \cos(z),\ z \in \mathbb{C},$ saa kaikki kompleksilukuarvot. Missä pisteissä z funktio $f(z)$ saa reaalisia arvoja ?

3. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z^2)}{(2z+1)(z+3i)}\, dz$$

kun $\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$.

4. Olkoon $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{it : 0 \leq t < \infty\}$. Määrää alueessa Ω jokin logaritmin haara. Jos $f(z)$ on valitsemasi logaritmin haara, osoita, että silloin $g(z) = zf(z) - z$ on f:n integraalifunktio. Perustele vastauksesi.

5. Olkoon funktio $f(z)$ analyyttinen koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$. Oletetaan, että jollakin $a > 0$ pätee

$$|f(z)| \leq (1 + |z|)^a, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Osoita, että silloin f on polynomi, jonka aste $deg(f) \leq a$. Milloin tässä pätee yhtäsuuruus ?