Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I, loppukoe.
18.6.2014

1. Etsi analyyttinen funktio $f(z)$, jonka reaaliosa on $x^3 - 3xy^2 + 3x$ ja jolle $f(i) = i$.

2. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{z^2 + 5z} \, dz$$

kun $\gamma(t) = re^{2\pi i t}$, $t \in [0, 1]$, ja a) $0 < r < 5$ sekä b) $r > 5$.

3. Etsi konformikuvaus $f : \Omega \to \mathbb{D}$, kun $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ on yksikkökiekko ja

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}.$$

4. Määrää integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} \, dx$$

[Vihje: Muista polkujen deformointi ja Cauchyn lauseet.]

5. Olkoon $f(z)$ koko tasossa $\mathbb{C}$ analyyttinen funktio, jolle

$$|f(z)| \leq (1 + |z|)^\gamma, \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Millä luvuilla $\gamma \in \mathbb{R}$ yo. ehdon toteuttava funktio voi olla a) rajoittamaton, b) vakio tai c) $f \neq 0$. Perustele vastauksesi kussakin vaihtoehdossa.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I

Final exam 12.5.2014

1. Is f analytic, if
   a) $f(x,y) = e^{-y}\sin(x) - ie^{-y}\cos(x)$
   b) $f(x,y) = x^2 - y^2 + x + i(2xy - y)$

2. Show that the function $f(z) = \sin(z)$, $z \in \mathbb{C}$, attains all values $w \in \mathbb{C}$. Show also that the function

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

does not attain the value i. Where $\tan(z)$ is analytic ?

3. Compute the integral

$$\int_\gamma \frac{ze^{i\pi z}dz}{z^2+1}$$

when $\gamma(t) = 2e^{2\pi it}$, $t \in [0,1]$.

4. Let $f(z) = \frac{1}{z^2} + e^{z^2}$ and assume $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ is a C^1-path. Show that

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

depends only on the endpoints $\gamma(0)$ and $\gamma(1)$ of the path γ.

5. Let $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < \sqrt{2},\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Find a conformal mapping $f : \Omega \to \mathbb{D}$, where $\mathbb{D}$ is the unit disk $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.