Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Homotopiateoria
Kurssikoe 21.3.2013

Vastaa **viiteen** seuraavista kuudesta tehtävästä. Tehtävät ovat aiheen (ei välttämättä vaikeustason) mukaisessa järjestyksessä.

1. Esittele lyhyesti perusryhmän määritelmä: mitä ovat ryhmän alkiot, miten ne konstruoidaan? Miten laskutoimitus määritellään? Esittele myös indusoidun homomorfismin määritelmä ja tärkeimmät ominaisuudet. Tässä ei tarvitse esittää todistuksia, tarvittaessa voit käyttää esim. sanontaa "voidaan osoittaa, että ...".
Miten määritelmä voidaan yleistää (ryhmät π_n)?

2. a) Laske perusryhmä $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus A)$, missä $A = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$.
b) Laske perusryhmä $\pi_1(B)$, missä

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{ainakin yksi koordinaateista } x_i \in \mathbb{Z}\}.$$

3. a) Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$ suljettu aliavaruus. Osoita, että inkluusio $A \to X$ on kofibraatio jos ja vain jos $X \times 0 \cup A \times I$ on $(X \times I)$:n retrakti.
b) Osoita, että inkluusio $\{\frac{1}{2}\} \to [0, 1]$ on kofibraatio.

4. Osoita peiteavaruuksien nostolausetta käyttäen, että jokainen jatkuva funktio $S^n \to S^1$ on nollahomotooppinen, kun $n > 1$.

5. Osoita yksityiskohtaisesti, että suljettu puoliavaruus

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$$

ei ole homeomorfinen avaruuden R^3 kanssa.

6. Oletetaan, että $p\colon E \to B$ on heikko fibraatio, jolla on sektio $s\colon B \to E$ (t.s. $p \circ s = \mathrm{id}_B$). Osoita, että jono

$$0 \longrightarrow \pi_n(F, s(b_0)) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, s(b_0)) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow 0$$

Käännä →