Hilbertin avaruuden operaattorit I, 14.12.2012
kesto n. 4 h

Oletetaan, että $\mathcal{H}$ on Hilbertin avaruus. Tarkastellaan myös Hilbertin avaruutta

$$\ell^2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty\}.$$

1. Olkoon $\mathcal{H}^*$ $\mathcal{H}$:n (topologinen) duaali. Osoita, että jokaista $f \in \mathcal{H}^*$ vastaa yksikäsitteisesti määrätty $\psi \in \mathcal{H}$, jolle $f(\varphi) = \langle \psi | \varphi \rangle$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{H}$. Osoita, että tällöin f:n ja ψ:n normit ovat samat. Osoita esimerkillä, että väite ei päde, jos luovutaan $\mathcal{H}$:n täydellisyydestä, ts. oletetaan vain, että $\mathcal{H}$ on sisätuloavaruus.

2. Mitä tarkoitetaan sillä, että operaattori $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on osittain isometrinen? Osoita, että V on osittain isometrinen, jos ja vain jos V^*V on projektio. Onko osittain isometrinen operaattori välttämättä normaali?

3. Olkoon $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Todista:
(a) Jos T on kompakti operaattori ja $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, niin ST ja TS ovat kompakteja operaattoreita.
(b) Jos T on kompakti operaattori, niin sen adjungaatti T^* on kompakti operaattori.
(c) Jos T^*T on kompakti operaattori, niin T on kompakti operaattori.

4. Mitä tarkoitetaan sillä, että $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ on Hilbertin-Schmidtin operaattori eli kuuluu luokkaan $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$? Osoita, että $\mathcal{HS}(\mathcal{H})$ on $\mathcal{L}(\mathcal{H})$:n *-ideaali.

5. Olkoon $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ rajoitettu funktio ja $T_g : \ell^2 \to \ell^2$ kaavalla $T_g f = gf$ määritelty rajoitettu lineaarioperaattori. Todista:
(a) Operaattori T_g kuuluu jälkiluokkaan $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, jos ja vain jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g(n)| < \infty.$$

(b) Luonnollisella normillaan varustetun jälkiluokan $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ duaali on isometrisesti isomorfinen rajoitettujen operaattoreiden Banachin avaruuden $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ kanssa.