Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 9.8.2012.

Vastaa valintasi mukaan **viiteen** tehtävään.

1. Näytä, että $\ell^p \subset c_0$, kun $1 \leq p < \infty$. Onko olemassa jonoja $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ jotka kuuluvat avaruuteen c_0, mutta ei mihinkään avaruuteen ℓ^p, $1 \leq p < \infty$? Entä ovatko avaruudet ℓ^p suljettuja c_0:ssa ?

2. a) Olkoon E Hilbertin avaruus ja $x, x_n \in E$. Jos kaikilla $y \in E$ on $(x_n|y) \to (x|y)$ kun $n \to \infty$, seuraako tästä, että $x_n \to x$ avaruudessa E ? Entä jos oletamme lisäksi että $\|x_n\| \to \|x\|$ kun $n \to \infty$?

b) Onko ℓ^∞ Hilbertin avaruus, so. voidaanko se varustaa sisätulolla, jonka määräämä normi on sama kuin ℓ^∞:n tavallinen normi ?

3. Näytä, että kaava $Tf(t) = \int_0^t f(s)\cos(s)\,ds$ määrittelee jatkuvan lineaarikuvauksen $T : C(0,\pi) \to C(0,\pi)$, ja määrää kuvauksen T normi.

4. (i) Kerro mikä on suljetun kuvaajan lauseen sisältö (lausetta ei tarvitse todistaa).

(ii) Olkoon E Hilbertin avaruus, ja $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset E$ jono sen vektoreita, joille $\sum_{k=1}^{\infty} |(x|x_k)|^2 < \infty$ kaikilla $x \in E$. Näytä suljetun kuvaajan lauseen avulla, että $T : E \to \ell^2$ on jatkuva lineaarikuvaus, kun asetetaan

$$Tx = \Big((x|x_k)\Big)_{k=1}^{\infty}, \quad x \in E.$$

5. Esitä lyhyesti ne ehdot, joilla Ascoli-Arzelan lauseen mukaan voi osoittaa, että annettu joukko H on relatiivisesti kompakti avaruudessa $C(0,1)$. Tutki sitten, ovatko joukot $H = \{f_s : 0 \leq s \leq 1\} \subset C(0,1)$ ja $H = \{f_s : s \geq 1\}$ relatiivisesti kompakteja, kun $f_s(x) = \sqrt{x+s}, \quad x \in [0,1]$.

6. Tarkastellaan Banach avaruutta $C[0,1]$, ja varustetaan se tavallisella normilla $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$. Kullakin $n \in \mathbb{N}$, olkoon F_n niiden funktioiden $f \in C[0,1]$ joukko, joille löytyy sellainen piste $x \in [0,1]$, että $|f(x) - f(y)| \leq n|x-y|$ kaikilla $y \in [0,1]$.

Osoita että jokainen joukoista F_n on suljettu. Voit olettaa tunnetuksi, että jokainen komplementtijoukoista $C[0,1] \setminus F_n$, $n \in N$, on tiheä, mutta saat 2 lisäpistettä jos osoitat tämän.

Osoita Bairen lauseen avulla, että niiden funktioiden $f \in C[0,1]$ joukko, jotka eivät ole missään derivoituvia, on tiheä avaruudessa $C[0,1]$.