Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 5.3.2013.

1. Olkoon E Hilbertin avaruus, ja $(x_n)_n$ ja $(y_n)_n$ jonoja sen suljetussa yksikköpallossa, siis $\|x_n\|, \|y_n\| \le 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Jos $(x_n|y_n) \to 1$ kun $n \to \infty$, osoita, että silloin $\|x_n - y_n\| \to 0$.

2. a) Määrittele jonoavaruudet $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$ ja $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Osoita, että $\|x\|_p \le \|x\|_q$ kun $q \le p$, ja tämän avulla, että $\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^p \subset c_0$, kun $1 \le q \le p$.

b) Anna esimerkki sarjasta $\sum_n x_n$ joka suppenee avaruudessa c_0, mutta ei missään avaruudessa ℓ^p, $1 \le p < \infty$.

3. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$f(x) = x^2 + \int_0^1 \frac{1}{10 + |x-t|^2} \, (f(t)+1)^2 \, dt, \qquad x \in [0,1],$$

on ratkaisu avaruudessa $C(0,1)$.

4. Muotoile Hahn-Banachin lause (ilman todistusta). Konstruoi sen avulla jatkuva lineaarinen kuvaus $T : \ell^\infty \to \mathbb{R}$, jolla seuraavat kaksi ominaisuutta:

$$T(x) = 0 \quad \text{kun} \quad x \in \ell^2, \qquad \text{ja} \qquad T(1,0,1,0,1,0,1,\dots) = 1.$$

5. Olkoot M ja N Banach-avaruuden E vektorialiavaruuksia, joille $M \cap N = \{0\}$ ja $E = M + N$. Osoita, että

a) jokaisella $x \in E$ on yksikäsitteinen esitys $x = m + n$, missä $m \in M$ ja $n \in N$.

b) Lineaarinen projektio $Px = m$ (kun $x = m+n$) on jatkuva jos ja vain jos aliavaruudet M ja N ovat suljettuja E:ssä.

[Vihje: Suljetun kuvaajan lause.]