Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 18.12.2012.

1. Jos E on Banach avaruus, kerro mikä on operaattoriin $T \in \mathcal{L}(E)$ liittyvä *Neumannin sarja* . Millä ehdolla sarja suppenee (operaattorinormin mielessä) ?
Näytä, että lineaarinen kuvaus $T : C(0,1) \to C(0,1)$,

$$Tf(x) = f(x) - \int_0^x t\, f(t)\, dt, \qquad x \in [0,1],$$

on jatkuva. Osoita sopivan Neumannin sarjan avulla, että T on myös kääntyvä operaattori.

2. Olkoot E ja F Banach-avaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Oletamme, että on olemassa vektorijono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$, jolle $\|x_n\| = 1$ ja $\|Tx_n\| = \frac{1}{n}\|x_n\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Voiko T olla injektio/surjektio/bijektio ? Positiivisissa tapauksissa anna esimerkit, negatiivisissa tapauksissa perustele vastauksesi.

3. Jos $< y^*, f >= f(1) + \int_0^{1/2} tf(t)dt$, näytä, että $y^* \in C(0,1)^*$. Onko olemassa sellaista alkiota $f \in C(0,1), \|f\|_\infty = 1$, jolle $< y^*, f >= \|y^*\|$?

4. Olkoot M ja N Banach-avaruuden E vektorialiavaruuksia, joille $M \cap N = \{0\}$ ja $E = M + N$. Osoita, että

a) jokaisella $x \in E$ on yksikäsitteinen esitys $x = m + n$, missä $m \in M$ ja $n \in N$.

b) Lineaarinen projektio $Px = m$ (kun $x = m + n$) on jatkuva jos ja vain jos aliavaruudet M ja N ovat suljettuja E:ssä.

[Vihje: Suljetun kuvaajan lause.]

5. Normiavaruuden E osajoukkoa $A \subset E$ sanotaan heikosti rajoitetuksi, jos

$$\sup_{x \in A} |< x^*, x >| < \infty \qquad \text{kaikilla } x^* \in E^*.$$

Osoita, että jokainen heikosti rajoitettu osajoukko A on rajoitettu myös normin mielessä, siis $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$.

[Vihje: Normin esittäminen duaalin alkioiden avulla; Tasaisen rajoituksen periaate biduaalissa]