Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 15.11.2012.

1. Olkoon $A = \{(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^1 : x_k > 0$ jokaisella $k = 1, 2, 3, \dots\}$. Onko A avaruuden ℓ^1 avoin osajoukko ?

2. Olkoon E Hilbertin avaruus ja M sen suljettu vektorialiavaruus. Osoita, että jokaisella $x \in E$,

$$\min\{\|x - m\| \,:\, m \in M\} = \max\{\,|(x|y)| \,:\, y \in M^{\perp},\ \|y\| = 1\}.$$

3. Osoita, että epälineaarisella integraaliyhtälöllä

$$5\,e^{x^2} f(x) + 1 \;=\; 5 \int_0^1 e^{x^2 - s^2}\, f(s)^2\, ds, \qquad x \in [0,1],$$

on ratkaisu $f \in C(0,1)$.

4. Olkoot $\mathcal{P} = \{p : p$ on reaalikertoiminen polynomi $\}$ ja

$$\mathcal{P}_n = \{p \in \mathcal{P} : \ \ p \text{ :n aste } \deg(p) \le n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Osoita, ettei ole olemassa jatkuvaa lineaarikuvausta $\phi : C(0,1) \to \mathbb{R}$ jolle $\phi(p) = p'(0)$ kaikilla $p \in \mathcal{P}$.

(ii) Näytä, että kun $n \in \mathbb{N}$ kiinteä, löytyy sellainen jatkuva lineaarikuvaus $\phi : C(0,1) \to \mathbb{R}$, että

$$\phi(p) \;=\; p'(0) \quad \text{kaikilla } \ p \in \mathcal{P}_n.$$

5. Jos $f \in L^2(0, 2\pi)$, osoita että

$$T : g \to \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) dt \;=: (Tg)(x)$$

määrittelee jatkuvan lineaarisen operaattorin $T : L^2(0,2\pi) \to L^2(0,2\pi)$, jonka normi $\|T\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$.

[Vihje: Tutki ensin T:n rajoittumaa trigonometristen polynomien muodostamaan vektoriavaruuteen; määrää Tg:n Fourier kertoimet.]