Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 15.5.2012.

1. (i) Anna esimerkki normiavaruudesta, joka ei ole Banach avaruus. Perustele väitteesi.

(ii) Onko joukko $A = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1 : |x_n| < n^{-3},\ \forall\, n = 1, 2, \dots\}$ avoin avaruudessa ℓ^1. Onko A rajoitettu ?

2. Olkoon Hilbertin avaruus $E = L^2(-1, 1)$ varustettuna sisätulolla

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$$

Tarkastellaan vektorialivaruutta $M \subset E$ jonka virittävät E:n vektorit $f(x) = x$ ja $g(x) \equiv 1$, $x \in [-1, 1]$.

Määrää E:n ortoprojektio aliavaruudelle M. Määrää myös funktion $h(x) = x^4$ etäisyys alivaruudesta M, kun E:n metriikkana on sisätulon määräämä normimetriikka.

3. Olkoon E Banach avaruus.

i) Osoita että operaattoriavaruus $\mathcal{L}(E)$ on täydellinen (normina operaattorinormi).

ii) Jos $A \in \mathcal{L}(E)$ toteuttaa ehdon $\|A\| < 1$, osoita, että lineaarinen kuvaus $\Phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $\Phi(T) = T + AT$, on kääntyvä eli isomorfismi.

[Vihje: Neumannin sarja]

4. (*teoria*) Muotoile avoimen kuvauksen lause ja todista sen avulla suljetun kuvaajan lause.

5. Oletetaan että H on Hilbert avaruus. Määritellään

$$\mathcal{F}_n(H) = \{T \in \mathcal{L}(H) : \dim T(H) \leq n\}.$$

Osoita, että $\mathcal{F}_n(H) \subset \mathcal{K}(H)$.
Jos $A \in \mathcal{L}(H)$, asetetaan $s_n(A) = \inf\{\|A - T\| : T \in \mathcal{F}_n(H)\}$. Osoita, että $(s_n(A))_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$, ja mikäli $(s_n(A))_{n=1}^{\infty} \in c_0$, silloin A on kompakti operaattori.