FUNKTIONAALI-ANALYYSI. (kevät 2014)

LOPPUKOE (ma 12.5.2014)

HUOM: Valitse vain 5 tehtävää seuraavista kuudesta!

1. Mitä tarkoittaa sarjan absoluuttinen suppeneminen Banach-avaruudessa? Olkoon $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ON-kanta Hilbert-avaruudelle H. Osoita, että summa $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e_n$ suppenee, muttei suppene absoluuttisesti avaruudessa H.

2. Olkoot $f_1(x) = x$ ja $f_2(x) = x^3$ kun $x \in (0,1)$. Määritä

$$\inf_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \int_0^1 |x^2 - c_1 f_1(x) - c_2 f_2(x)|^2 dx.$$

Millä kertoimien c_1, c_2 arvoilla infimum saavutetaan?

3. (i) Muotoile Hahn-Banachin lause tarkasti (ei tarvitse todistaa).

(ii) Osoita Hahn-Banachin lauseen avulla, että mikäli E on Banach-avaruus, ja $x \in E$, silloin löytyy $x \in X^*$ jolle $\|x^*\| = 1$ ja $x^*(x) = \|x\|$.

4. Olkoon $T : C(0,1) \to C(0,1)$ kuvaus $\quad (Tf)(x) := \displaystyle\int_0^1 (x + t^2)^2 t f(t^2) dt \quad$ kun $x \in [0,1]$. Tässä $C(0,1)$ on jatkuvien funktioiden avaruus suljetulla välillä $[0,1]$ varustettuna sup-normilla.

(i) Osoita, että T on jatkuva lineaarinen operaattori $T : C(0,1) \to C(0,1)$.

(ii) Onko kuvaus $T : C(0,1) :\to C(0,1)$ kompakti (tässä kohdassa voit käyttää kaikkia luentojen tuloksia)?

5. Olkoon $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ sellainen annettu reaalilukujen jono, että

$$\text{sarja} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee kaikilla jonoilla } (x_k) \in c_0.$$

Näytä, että silloin $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^1$.

[Vihje: käytä apuna erästä luennoilla käsiteltyä funktionaalianalyysin peruslausetta.]

6. Todista, että nollaan suppenevien jonojen vektoriavaruus c_0 on täydellinen, eli että se on Banach-avaruus.