Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II
Erilliskoe 24.1.2013

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemi

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x + 5y\\ \dot{y}(t) &= -x - 3y.\end{aligned}$$

Määrää lisäksi sen kriittisen pisteen $\mathbf{0} = (0,0)$ laatu (stabiili vai epästabiili).

2. Muodostavatko funktiot $\mathbf{x}_1(t) = (e^{-t}, 1)$ ja $\mathbf{x}_2(t) = (-2, -e^t)$ välillä $\mathbf{R}$ perusjärjestelmän homogeenisysteemille

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)?$$

3. Ratkaise differentiaaliyhtälösysteemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} e^t \\ 2e^t \end{bmatrix}.$$

4. Palauta toisen kertaluvun (skalaarinen) differentiaaliyhtälö

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) - x(t)^2 = 0$$

ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoiseksi systeemiksi ja määrää tämän (autonomisen) systeemin kriittiset pisteet sekä niiden laatu (stabiili vai epästabiili).

5. (Skalaarisella) differentiaaliyhtälöllä

$$y'(x) = y \sin\left(\frac{\pi}{2} e^{-x} y\right)$$

on ratkaisut $y_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y_1(x) \equiv 0$, ja $y_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y_2(x) = e^x$, kuten helposti nähdään. Lisätään yhtälöön vielä alkuehto $y(0) = 1/2$, ja olkoon $y : I \to \mathbf{R}$ tämän alkuarvotehtävän ratkaisu.

(a) Miksi kyseisen ratkaisun kuvaaja ei leikkaa funktioiden y_1 ja y_2 kuvaajia?

(b) Mikä on ratkaisun y maksimaalinen ratkaisuväli? Perustelu.