

Analyysin peruskurssi

Kurssikoe / Slutförhör

8.8.2013

Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita.

Inga miniräknare eller någon form av anteckningar är tillåtna i tentamen.

Ratkaise kaikki tehtävät ja perustele vastauksesi.

Lös varje problem och motivera dina svar.

1. Todista induktiolla, että kaikille $n \geq 1$

Bevisa med induction att för alla $n \geq 0$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

2. Saavuttaako funktio $f(x) = \sin x + \cos x$ suurimman tai pienimmän arvonsa välillä $(-\infty, \infty)$? Jos saavuttaa, määritä ko. arvo.
Har funktionen $f(x) = \sin x + \cos x$ nå sitt högsta eller lägsta värdet på intervallet $(-\infty, \infty)$? Om det gör det, fastställa detta värde.

3. Määritä raja-arvo. / Bestäm gränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$$

4. Laske allaoleva integraali tulkitsemalla se geometrisen kuvion pinta-
alaksi ja määrittämällä ko. pinta-ala.
Beräkna integralen nedan genom att tolka den som arean hos en
geometrisk figur, och genom att beräkna detta område.

$$\int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx$$

5. Määritä seuraavien funktioiden kaikki antiderivaatat
Hitta alla primitiva funktioner för följande funktioner

a. $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

b. $\int \cos(x) + \frac{5}{x} dx$