

# Analyysin peruskurssi

## Kurssikoe / Course Examination

13.6.2013

Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita.  
No calculators or any kind of notes are allowed in the exam.

Ratkaise kaikki tehtävät ja perustele vastauksesi.  
Solve each problem and justify your answers.

1. Todista induktiolla, että kaikille  $n \geq 0$   
Prove by induction that for all  $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Saavuttaako funktio  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  suurimman tai pienimmän arvonsa välillä  $(0, \infty)$ ? Jos saavuttaa, määritä ko. arvo.

Does the function  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  attain its maximum or minimum value on the interval  $(0, \infty)$ ? If it does, determine that value.

3. Määritä raja-arvo. / Find the limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{6x^2 + 9x + 1} - \sqrt{9x^2 - 5x + 1}}$$

4. Laske allaoleva integraali tulkitsemalla se geometrisen kuvion pinta-  
alaksi ja määrittämällä ko. pinta-ala.

Compute the integral below by interpreting it as the area of a geometric figure, and by computing this area.

$$\int_{-1}^1 ||x + 1| - 1| dx$$

5. Määritä seuraavien funktioiden kaikki antiderivaatat  
Find all antiderivatives of the following functions

a.  $f(x) = -\sin x + \frac{1}{1+x^2}$

b.  $g(x) = \frac{1}{x} + x$