

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Erilliskoe ("loppukoe")
24. 1. 2013

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Pitääkö kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$ ja kaikilla $x \in \mathbb{R}$ paikkansa

$$|x|^n \geq 1 - n + n|x|?$$

2. Selvitä funktion raja-arvoa koskevien lauseiden avulla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 + 1)}{3 + x^3}.$$

Tarkka perustelu!

3. Onko funktio f derivoituva kohdassa $x = 0$, jos kaikilla x pätee

$$f(x) = \sqrt[3]{x}?$$

Tarkka perustelu.

4. Oletetaan, että f on jatkuva koko joukossa \mathbb{R} ja että

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \text{ ja } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3.$$

Osoita, että on olemassa luku $M > 0$, jolle kaikilla $x \geq 0$ pätee

$$|f(x)| \leq M.$$

5. Onko olemassa funktiota f , jolle pätee $f'(x) = 2$ kun $x \leq 0$ ja $f'(x) = 1$ kun $x > 0$? Tarkka perustelu!