

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

1. Erillistentti ("loppukoe")

22.10.2012

SAITKO OIKEAT TEHTÄVÄT: TÄMÄ ON ERILLISTENTTI, JOLLA VOI SUORITTA A KOKO KURSSIN ANALYYSI I. TÄMÄ EI OLE KURSSIKOE, JOKA LIITTYY SYKSYN 2012 LUENTOKURSSIIN.

1. Selvitä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + n + 1}.$$

Tehtävässä saa käyttää kurssin lauseita sekä tietoja vakiojonon ja jonon $(\frac{1}{n})$ raja-arvoista. Huolellinen perustelu!

2. Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1}{3n - 1} = \frac{1}{3}.$$

3. Funktiosta g oletetaan, että kaikilla x pätee $|g(x)| \leq 3$. Osoita, että ehdolla

$$f(x) = (x - 1)^2 g(x + 1)$$

määritelty funktio on derivoituva kohdassa $x = 1$.

4. Oletetaan, että $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva. Oletetaan, että $f(x) \rightarrow 0$ kun $x \rightarrow -\infty$ ja $f(x) \rightarrow 2$ kun $x \rightarrow \infty$. Osoita, että on olemassa $x \in \mathbb{R}$, jolle pätee $f(x) = 1$.

5. Oletetaan, että funktio $f:] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva välillä $] - 1, 1[$. Oletetaan lisäksi, että $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ ovat olemassa. Osoita, että

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x).$$