Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
1. kurssikoe
27.2.2013

Koeaika on kolme tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa.

1. (8 pistettä)

   (a) Tutkitaan reaalilukujen laskutoimitusta $*$, joka määritellään kaavalla
   $$a * b = a + b^2 \quad \text{kaikilla } a, b, \in \mathbb{R}.$$
   Osoita, että laskutoimitus ei ole liitännäinen. Osoita, että laskutoimituksella ei ole neutraalialkiota.

   (b) Tutkitaan jäännösluokkaryhmää $(\mathbb{Z}_8, +)$. Osoita, että $[-5]_8$ ja $[3]_8$ ovat molemmat alkion $[5]_8$ vasta-alkioita. Miksi tämä ei ole ristiriidassa sen kanssa, että ryhmän alkioilla on aina täsmälleen yksi vasta-alkio? (Tietoa jäännösluokista löytyy tarpeen tullen paperin alaosasta.)

   (c) Määritä ryhmän S_5 alkio $(4251)^{-2}$.

2. (6 pistettä)

   (a) Osoita, että $H = \{(1), (132)(654), (123)(645))\}$ on ryhmän S_6 aliryhmä.

   (b) Aliryhmät ovat aina ryhmiä. Aliryhmän määritelmässä ei kuitenkaan suoranaisesti sanota mitään tällaista. Selitä lyhyesti omin sanoin, miksi aliryhmän määritelmästä seuraa, että se on ryhmä.

3. (4 pistettä) Tuloryhmällä $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on aliryhmä $H = \{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Osoita, että ryhmä $(\mathbb{R}, +)$ on isomorfinen ryhmän $(H, +)$ kanssa. (Ryhmässä H laskutoimituksena on komponenteittain määritelty yhteenlasku.)

4. (6 pistettä) Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi.

   (a) Ryhmän G alkion g virittämä aliryhmä on joukko $\{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$, missä n on eräs positiivinen kokonaisluku.

   (b) Äärettömällä syklisellä ryhmällä ei voi olla kolmea eri virittäjää.

Tietoa jäännösluokista:

Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Alkion $a \in \mathbb{Z}$ jäännösluokka modulo n on joukko
$$[a]_n = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{n}\} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$
Jäännösluokkien joukossa $\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$ voidaan määritellä yhteenlasku kaavalla
$$[a]_n + [b]_n = [a + b]_n \quad \text{kaikilla } a, b \in \mathbb{Z}.$$
Joukko $\mathbb{Z}_n$ yhteenlaskulla varustettuna on ryhmä.