

Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Erilliskuulustelu

22.1.2015

1. Tutkitaan renkaan $\mathbb{Z}_3[X]$ polynomeja

$$P = X^3 + 5X^2 - 2, \quad Q = X^3 + 2X^2 + 1 \quad \text{ja} \quad R = 2X^2 + X + 1.$$

- (a) Mitkä polynomeista ovat samoja?
(b) Mitä polynomeja vastaa sama polynomikuvaus?
2. Tutkitaan ryhmää $G = \{1, a, b, c, d, e, f, g\}$, jolla on oheinen kertotaulu. Ryhmällä G on normaali aliryhmä $H = \{1, b\}$.

\cdot	1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	a	b	c	d	e	f	g
a	a	b	c	1	g	d	e	f
b	b	c	1	a	f	g	d	e
c	c	1	a	b	e	f	g	d
d	d	e	f	g	1	a	b	c
e	e	f	g	d	c	1	a	b
f	f	g	d	e	b	c	1	a
g	g	d	e	f	a	b	c	1

- (a) Määritä aliryhmän H vasempien sivuluokkien joukko G/H .
(b) Mitkä seuraavista laskuista on laskettu oikein?
- $$aH \cdot dH = fH, \quad fH \cdot gH = cH$$
- (c) Määritä tekijäryhmän G/H alkion aH virittämä aliryhmä.
3. (a) Osoita, että kuvaus $f: \mathbb{Z} \rightarrow S_4$, $f(n) = (1234)^n$ on ryhmähomomorfismi.
(b) Määritä kuvauksen f ydin.
(c) Ryhmien homomorfialauseen mukaan kuvauksesta f saadaan tietty isomorfismi \bar{f} . Mikä on kuvauksen \bar{f} lähtöjoukko? Mikä lähtöjoukon alkio kuvautuu permutaatiolle (1234) kuvauksessa f ?
4. (a) Oletetaan, että $(G, +)$ on vaihdannainen ryhmä, jolla on neutraalialkio e . Osoita, että joukko $H = \{a \in G \mid 5a = e\}$ on ryhmän G aliryhmä.
(b) Ryhmällä S_4 on aito aliryhmä H , jossa on ainakin 10 alkioita. Mikä on H :n kertaluku?
5. (a) Onko rengas $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ kokonaisalue?
(b) Olkoon $(R, +, \cdot)$ rengas. Olkoon R^* kaikkien renkaan R yksiköiden joukko. Osoita, että $R = R^*$, jos ja vain jos R on nollarengas.