

# Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Erilliskuulustelu

30.10.2014

1. (a) Oletetaan, että  $G$  on ryhmä, jossa on alkio  $b$  ja  $c$ . Ratkaise ryhmässä  $G$  yhtälö

$$b(xc) = b.$$

- (b) Joukossa  $A = \{a, b, c\}$  on määritelty laskutoimitus  $*$  seuraavan laskutoimitustaulun avulla:

$*$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$b$	$c$
$b$	$b$	$b$	$a$
$c$	$c$	$c$	$a$

Ratkaise joukossa  $A$  yhtälö  $b * (x * c) = b$ .

2. (a) Tutkitaan ryhmää  $S_4$  ja sen normaalia aliryhmää

$$V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

i. Määritä sivuluokka  $(132)V$ .

ii. Mitkä seuraavista sivuluokista ovat samoja? Muista perustella vastauksesi.

$$(132)V, \quad (12)V \cdot (24)V, \quad ((23)V)^{-1}$$

- (b) Ryhmällä  $7\mathbb{Z}$  on aliryhmä  $28\mathbb{Z}$ . Määritä indeksi  $[7\mathbb{Z} : 28\mathbb{Z}]$ .

3. Tutkitaan rengasta  $R = \{a, b, c, d\}$ , jonka laskutoimitustaulut näyttävät seuraavilta:

$+$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
$b$	$b$	$c$	$d$	$a$	$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$	$c$	$a$	$c$	$a$	$c$
$d$	$d$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$d$	$c$	$b$

(a) Mitä renkaan  $R$  alkioita vastaavat kokonaisluvut  $0, 1, 2$  ja  $-1$ ?

(b) Onko  $R$  kunta?

(c) Määritä polynomin  $2X^2 - X + 4 \in R[X]$  juuret.

4. (a) Osoita, että kuvaus  $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(a, b) = a$  on ryhmähomomorfismi.

(b) Osoita, että ryhmät  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\{0\} \times \mathbb{Z})$  ja  $\mathbb{Z}$  ovat isomorfiset.

(c) Luettele kolme tekijäryhmän  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\{0\} \times \mathbb{Z})$  alkioita.

5. Osoita, että jos  $G$  on ääretön syklinen ryhmä, sillä on ainakin kaksi eri virittäjää.