

Algebra I
Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu
16.8.2014

1. Joukossa \mathbb{R} voidaan määritellä laskutoimitus $*$ kaavalla

$$a * b = a + b^2 \quad \text{kaikilla } a, b \in \mathbb{R}.$$

- (a) Onko laskutoimitus $*$ liitännäinen?
(b) Onko laskutoimituksella $*$ neutraalialkiota?
2. (a) Päättele kokonaisalueen määritelmän avulla, onko \mathbb{Z}_{130} kokonaisalue.
(b) Osoita, että jokainen kunta on kokonaisalue.
3. (a) Luettele kaikki joukon $\{P \in \mathbb{Z}_2[X] \mid \deg(P) < 2\}$ alkioit.
(b) Onko polynomi $2X^2 - X + 4 \in \mathbb{Z}_5[X]$ jaoton?
4. Ryhmällä $G = \{(1), (14), (15), (45), (145), (154)\}$ on aliryhmät $H = \{(1), (145), (154)\}$ ja $K = \{(1), (14)\}$.
- (a) Määritä sivuluokka $(15)H$.
(b) Voidaanko puhua tekijäryhmästä G/H ? Jos voidaan, määritä tekijäryhmän alkioit sekä kertotaulu. Muista perustella vastauksesi.
(c) Voidaanko puhua tekijäryhmästä G/K ? Jos voidaan, määritä tekijäryhmän alkioit sekä kertotaulu. Muista perustella vastauksesi.
5. (a) Oletetaan, että $f: \mathbb{Z}_4 \rightarrow S_6$ on ryhmähomomorfismi, jolle pätee $f([1]_4) = (1543)$. Määritä $f([3]_4)$.
(b) Kuinka monta homomorfismia on olemassa ryhmältä \mathbb{Z}_6 ryhmälle \mathbb{Z}_5 ?