

Algebra I
Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu
16.8.2014

1. Määritellään joukossa \mathbb{Z}_4 laskutoimitus $*$ ehdolla $[a]_4 * [b]_4 = [3ab]_4$.
 - (a) Osoita, että laskutoimitus $*$ on liitännäinen.
 - (b) Laskutoimituksella $*$ on neutraalialkio. Mikä se on?
2.
 - a) Tutki kokonaisalueen määritelmän avulla, onko \mathbb{Z}_{130} kokonaisalue.
 - b) Osoita, että jokainen kunta on kokonaisalue.
3.
 - (a) Mitä ovat sykkliset ryhmät?
 - (b) Merkitään $A = \{(1), (123), (132)\}$. Osoita, että $\mathbb{Z}_2 \times A$ on syklinen.
4. Tutkitaan neliön symmetriaryhmää D_4 , jolla on oheinen kertotaulu. Ryhmällä on normaali aliryhmä $H = \{1, b\}$.

	1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	a	b	c	d	e	f	g
a	a	b	c	1	g	d	e	f
b	b	c	1	a	f	g	d	e
c	c	1	a	b	e	f	g	d
d	d	e	f	g	1	a	b	c
e	e	f	g	d	c	1	a	b
f	f	g	d	e	b	c	1	a
g	g	d	e	f	a	b	c	1

- (a) Määritä tekijäryhmä D_8/H alkioit.
- (b) Mitkä seuraavista sivuluokista ovat samoja?

$$cH, \quad eH \cdot gH, \quad (cH)^{-1}$$

5.
 - (a) Oletetaan, että $f: \mathbb{Z} \rightarrow S_3$ on ryhmähomomorfismi, jolle pätee $f(1) = (12)$. Määritä $f(3)$.
 - (b) Voiko olla olemassa ryhmähomomorfismia, jonka lähtöjoukossa on kuusi alkioita ja kuvassa neljä alkioita?