

**Algebra I**  
**Helsingin yliopisto**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Erilliskuulustelu**  
**12.5.2014**

1. Joukko  $G = \{[1]_9, [2]_9, [4]_9, [5]_9, [7]_9, [8]_9\}$  on ryhmä, kun laskutoimituksena on jäännösluokkien kertolasku.
  - (a) Mikä on alkion  $[2]_9$  käänteisalkio?
  - (b) Osoita, että joukko  $H = \{[1]_9, [4]_9, [7]_9\}$  on ryhmän  $G$  aliryhmä.
2. Tutkitaan renkaan  $\mathbb{Z}_3[X]$  alkiota  $P = 2X^2 + 2X + 2$ .
  - (a) Määritä polynomin  $P$  juuret.
  - (b) Onko  $P$  jaoton?
  - (c) Onko  $P$  yksikkö?
3. Tutkitaan ryhmän  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  aliryhmää  $H = \{(7a, -3a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ . Osoita, että kuvaus  $f: \mathbb{Z} \rightarrow H$ ,  $f(a) = (7a, -3a)$  on ryhmäisomorfismi.
4. Oletetaan, että  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Osoita, että jos  $n$  ei ole alkuluku, niin rengas  $\mathbb{Z}_n$  ei ole kokonaisalue.
5. Miten kuuluu Lagrangen lause? Selitä omin sanoin, miksi lause pitää paikkansa.
6. Tutkitaan ryhmää  $S_4$  ja sen normaalia aliryhmää

$$V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

- (a) Määritä sivuluokka  $(132)V$ .
- (b) Mitkä seuraavista sivuluokista ovat samoja? Muista perustella vastauksesi.

$$(132)V, \quad (12)V \cdot (24)V, \quad ((23)V)^{-1}$$

- (c) Osoita, että  $S_4/V$  ei ole syklinen.