Algebra I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu
23.1.2014

1. Tutkitaan renkaan $\mathbb{Z}_2[X]$ alkiota $p = X^2 + X + 1$.
   (a) Määritä polynomin p juuret.
   (b) Onko p jaoton?
   (c) Onko p yksikkö?

2. Tutkitaan ryhmää S_7.
   (a) Määritä $((62)(17))^{-3}$.
   (b) Määritä alkion (145) virittämä aliryhmä.
   (c) Ratkaise yhtälö $(315)x(14) = (12)$.

3. Tutkitaan ryhmää $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, jossa on laskutoimituksena komponenteittain määritelty yhteenlasku. Merkitään
$$A = \{(4x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$
   (a) Osoita, että A on ryhmän $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aliryhmä.
   (b) Aliryhmä A on normaali, joten voidaan puhua tekijäryhmästä $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/A$. Mitkä seuraavista tekijäryhmän alkioista ovat samoja?
$$(4, 1) + A, \quad (-1, -1) + A + (-3, 0) + A, \quad -((1, 1) + A)$$

4. Oletetaan, että R on rengas, jolla on alirengas S. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?
   (a) Jos R on kokonaisalue, myös S on kokonaisalue.
   (b) Jos R on kunta, myös S on kunta.

5. Osoita, että kuvaus $f\colon S_6 \to S_6$, $f(\sigma) = (341)\sigma(143)$ on ryhmähomomorfismi. Määritä sen ydin ja kuva.