

Algebra I
Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Yleistentti
22.10.2013

1. Ohessa on annettu erään ryhmän $G = \{a, b, c, d, x, y\}$ kertotaulu.

\cdot	a	b	c	d	x	y
a	a	b	c	d	x	y
b	b	c	a	x	y	d
c	c	a	b	y	d	x
d	d	x	y	b	c	a
x	x	y	d	c	a	b
y	y	d	x	a	b	c

- (a) Määritä alkion b kertaluku.
(b) Määritä alkio c^{-4} .
(c) Etsi ryhmälle G aliryhmä, jonka kertaluku on 4, tai osoita, ettei sellaista ole olemassa.
2. Ryhmällä $G = \{(1), (14), (15), (45), (145), (154)\}$ tiedetään olevan aliryhmät $H = \{(1), (145), (154)\}$ ja $K = \{(1), (14)\}$.
- (a) Määritä sivuluokka $(15)H$.
(b) Voidaanko puhua tekijäryhmästä G/H ? Jos voidaan, määritä tekijäryhmän alkiot sekä kertotaulu. Muista perustella vastauksesi.
(c) Voidaanko puhua tekijäryhmästä G/K ? Jos voidaan, määritä tekijäryhmän alkiot sekä kertotaulu. Muista perustella vastauksesi.
3. Osoita, että kokonaisalueessa D pätee niin kutsuttu supistamissääntö:

Oletetaan, että $a, b, c \in D$ ja $a \neq 0$. Jos $ab = ac$, niin $b = c$.

4. Osoita, että joukko

$$R = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ on pariton} \right\}$$

on renkaan \mathbb{Q} alirengas. Mitkä ovat renkaan R yksiköt?

5. Kuinka monta homomorfismia on olemassa ryhmältä \mathbb{Z}_6 ryhmälle \mathbb{Z}_4 ?