Algebra I
Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kesätentti
8.8.2013

1. Tutkitaan renkaan $\mathbb{Z}_3[X]$ alkiota $p = X^2 + X + 1$.
   a) Määritä polynomin p juuret.
   b) Onko p jaoton?
   c) Onko p yksikkö?

2. a) Päättele kokonaisalueen määritelmän perusteella, onko rengas $\mathbb{Z}_{12}$ kokonaisalue.
   b) Voiko joukossa $\mathbb{Z}_{17}$ määritellä laskutoimituksen $*$ kaavalla
   $$[a]_n * [b]_n = [a^2 b - a]?$$

3. Miten kuuluu Lagrangen lause? Selitä omin sanoin, miksi lause pitää paikkansa.

4. Ryhmällä $\mathbb{Z}_{15}$ on aliryhmä $H = \{[0]_{15}, [5]_{15}, [10]_{15}\}$.
   a) Määritä vasenten sivuluokkien joukko $\mathbb{Z}_{15}/H$.
   b) Koska H on normaali, joukko $\mathbb{Z}_{15}/H$ on ryhmä. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?
   $$([1]_{15} + H) + ([6]_{15} + H) = [3]_{15} + H$$
   $$([2]_{15} + H) + ([4]_{15} + H) = [1]_{15} + H$$
   c) Määritä alkion $[2]_{15} + H$ kertaluku tekijäryhmässä $\mathbb{Z}_{15}/H$.

5. Osoita, että kuvaus $f\colon S_7 \to S_7$, $f(\sigma) = (163)\sigma(136)$ on ryhmähomomorfismi. Määritä sen ydin ja kuva.