

Algebra I
 Matematiikan ja tilastotieteen laitos
 Helsingin yliopisto
 Kesätentti
 13.6.2013

1. Ohessa on annettu erään ryhmän $G = \{a, b, c, d, x, y\}$ kertotaulu.

\cdot	a	b	c	d	x	y
a	a	b	c	d	x	y
b	b	c	a	x	y	d
c	c	a	b	y	d	x
d	d	x	y	b	c	a
x	x	y	d	c	a	b
y	y	d	x	a	b	c

- (a) Määritä alkion b kertaluku.
 (b) Määritä alkio c^{-4} .
2. Ohessa ovat renkaan $R = \{a, b, c, d\}$ laskutoimitustaulut.

$+$	a	b	c	d	\cdot	a	b	c	d
a	a	b	c	d	a	a	a	a	a
b	b	a	d	c	b	a	b	a	b
c	c	d	a	b	c	a	a	c	c
d	d	c	b	a	d	a	b	c	d

Määritä renkaan R yksiköt. Onko R kunta?

3. Tutkitaan kuvausta $f: S_4 \rightarrow S_4$, $f(\sigma) = (123)\sigma(132)$.
- (a) Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.
 (b) Mikä on homomorfismin f ydin? Entä kuva?
4. Ryhmällä $G = \{(1), (14), (15), (45), (145), (154)\}$ tiedetään olevan aliryhmät $H = \{(1), (145), (154)\}$ ja $K = \{(1), (14)\}$.
- (a) Onko H normaali? Entä K ?
 (b) Voidaanko puhua tekijäryhmästä G/H ? Jos voidaan, määritä tekijäryhmän alkioit sekä kertotaulu. Muista perustella vastauksesi.
 (c) Voidaanko puhua tekijäryhmästä G/K ? Jos voidaan, määritä tekijäryhmän alkioit sekä kertotaulu. Muista perustella vastauksesi.

5. Oletetaan, että R on rengas. Osoita, että joukko

$$S = \{a \in R \mid ar = ra \text{ kaikilla } r \in R\}$$

on renkaan R alirengas.