

## Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Erilliskuulustelu

13.5.2013

1. (6 pistettä) Tutkitaan ryhmää  $S_7$ .
  - (a) Laske tulo  $(532)(16) \cdot (465)$ .
  - (b) Määritä  $(657)^{-2}$ .
  - (c) Määritä alkion  $(123)(456)$  virittämä aliryhmä.
2. (4 pistettä)
  - a) Etsi polynomien  $P = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$  juuret.
  - b) Onko  $P$  jaoton?
3. (8 pistettä) Tutkitaan ryhmää  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , jossa on laskutoimituksena komponenteittain määritelty yhteenlasku. Merkitään
$$A = \{(4x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$
  - (a) Osoita, että  $A$  on ryhmän  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  aliryhmä.
  - (b) Aliryhmä  $A$  on normaali, joten voidaan puhua tekijäryhmästä  $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})/A$ . Mitkä seuraavista tekijärenkaan alkioista ovat samoja?
$$(4, 1) + A, \quad (-1, -1) + A + (-3, 0) + A, \quad -((1, 1) + A)$$
4. (4 pistettä) Oletetaan, että  $R$  on rengas, jolla on alirengas  $S$ . Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?
  - (a) Jos  $R$  on kokonaisalue, myös  $S$  on kokonaisalue.
  - (b) Jos  $R$  on kunta, myös  $S$  on kunta.
5. (6 pistettä) Osoita, että ryhmät  $5\mathbb{Z}/500\mathbb{Z}$  ja  $\mathbb{Z}_{100}$  ovat isomorfiset.