

**Algebra I**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Yleistentti**  
**22.10.2012**

1. a) Etsi polynomin  $P = X^3 + 2X^2 - 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$  juuret.  
 b) Onko  $P$  jaoton?
2. a) Mitä tarkoitetaan renkaan yksiköllä?  
 b) Renkaan  $R = \{a, b, c, d\}$  laskutoimitustaulut on annettu alla.

$+$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
$b$	$b$	$c$	$d$	$a$	$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$	$c$	$a$	$c$	$a$	$c$
$d$	$d$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$d$	$c$	$b$

Määritä renkaan  $R$  yksiköt. Onko  $R$  kunta?

3. Ryhmällä  $G = \{(1), (14), (15), (45), (145), (154)\}$  tiedetään olevan aliryh-  
 mät  $H = \{(1), (145), (154)\}$  ja  $K = \{(1), (14)\}$ .
  - a) Voidaanko puhua tekijäryhmästä  $G/H$ ? Jos voidaan, määritä tekijä-  
 ryhmän alkiot sekä kertotaulu. Muista perustella vastauksesi.
  - b) Voidaanko puhua tekijäryhmästä  $G/K$ ? Jos voidaan, määritä tekijä-  
 ryhmän alkiot sekä kertotaulu. Muista perustella vastauksesi.
4. Tarkastellaan ryhmää  $S_{\mathbb{R}} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on kääntyvä}\}$ , jonka laskutoi-  
 mituksena on kuvausten yhdistäminen. Osoita, että joukko

$$H = \{f \in S_{\mathbb{R}} \mid f(3) = 3\}$$

on ryhmän  $S_{\mathbb{R}}$  aliryhmä.

5. Olkoon  $f: G \rightarrow G'$  ryhmähomomorfismi. Oletetaan, että ryhmä  $G$  on  
 syklinen. Osoita, että myös kuva  $fG$  on syklinen.