

**Algebra I**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Kesätentti**  
**9.8.2012**

1. Tutkitaan reaalilukujen laskutoimitusta  $*$ , joka määritellään ehdolla

$$a * b = a^2 + b^2 \quad \text{kaikilla } a, b, \in \mathbb{R}.$$

Onko laskutoimitus liitännäinen? Entä vaihdannainen? Onko sillä neutraalialkiota?

2. Tutkitaan renkaan  $\mathbb{Z}_3$  polynomeja

$$P = X^3 + 2X^2 + 1, \quad Q = 2X^2 + X - 2 \quad \text{ja} \quad R = X^3 + 5X^2 + 1.$$

- a) Mitkä polynomeista ovat samoja?  
 b) Mitä polynomeista vastaa sama polynomikuvaus?
3. Ryhmällä  $G = \{(1), (14), (15), (45), (145), (154)\}$  tiedetään olevan aliryhmät  $H = \{(1), (145), (154)\}$  ja  $K = \{(1), (14)\}$ .
- a) Voidaanko puhua tekijäryhmästä  $G/H$ ? Jos voidaan, määritä tekijäryhmän alkiot sekä kertotaulu. Muista perustella vastauksesi.  
 b) Voidaanko puhua tekijäryhmästä  $G/K$ ? Jos voidaan, määritä tekijäryhmän alkiot sekä kertotaulu. Muista perustella vastauksesi.

4. Renkaan  $R = \{a, b, c, d\}$  laskutoimitustaulut on annettu alla.

$+$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
$b$	$b$	$a$	$d$	$c$	$b$	$a$	$b$	$a$	$b$
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$	$c$	$a$	$a$	$c$	$c$
$d$	$d$	$c$	$b$	$a$	$d$	$a$	$b$	$c$	$d$

Määritä renkaan  $R$  yksiköt. Onko  $R$  kunta?

5. Olkoon  $G$  syklinen ryhmä, jonka kertaluku on  $n \in \mathbb{N}$ . Osoita, että  $G$  on isomorfinen ryhmän  $\mathbb{Z}_n$  kanssa.