

**Algebra I**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Kesätentti**  
**14.6.2012**

- (4 pistettä) Osoita, että  $\{[0]_{24}, [6]_{24}, [12]_{24}, [18]_{24}\}$  on ryhmän  $\mathbb{Z}_{24}$  aliryhmä.
- (4 pistettä) Osoita, että kuvaus  $f: S_4 \rightarrow S_4$ ,  $f(\sigma) = (123)\sigma(132)$  on ryhmähomomorfismi.
- (4 pistettä) Määrittelekö ehto  $[a]_4 * [b]_4 = [a - 5b]_4$  laskutoimituksen joukossa  $\mathbb{Z}_4$ ?
- (6 pistettä) Tutkitaan tekijäryhmää  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

a) Mitkä seuraavista tekijäryhmän alkiosta ovat samoja?

$$-\frac{5}{6} + \mathbb{Z}, \quad \frac{11}{6} + \mathbb{Z}, \quad \frac{7}{6} + \mathbb{Z}$$

b) Osoita, että  $-(\frac{2}{5} + \mathbb{Z}) = \frac{8}{5} + \mathbb{Z}$ .

c) Määritä alkion  $\frac{3}{4} + \mathbb{Z}$  kertaluku.

5. (6 pistettä)

a) Osoita, että rengas  $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$  ei ole kokonaisalue.

b) Renkaan  $R = \{a, b, c, d\}$  laskutoimitustaulut on annettu alla. Onko  $R$  kunta?

$+$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
$b$	$b$	$a$	$d$	$c$	$b$	$a$	$b$	$a$	$b$
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$	$c$	$a$	$a$	$c$	$c$
$d$	$d$	$c$	$b$	$a$	$d$	$a$	$b$	$c$	$d$

6. (6 pistettä) Olkoon  $f: G \rightarrow H$  ryhmähomomorfismi ja olkoon  $g \in G$ . Osoita, että alkion  $f(g)$  kertaluku jakaa alkion  $g$  kertaluvun.