

Algebra I
Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu
10.5.2012

1. a) Määritä ryhmän $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ aliryhmä $\langle [6]_{10} \rangle$.
b) Määrittelekö ehto $[a]_n * [b]_n = [a^2 + b]_n$ laskutoimituksen joukossa \mathbb{Z}_n ?
2. Osoita, että ryhmät $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(13\mathbb{Z}, +)$ ovat isomorfiset.
3. Ryhmällä S_4 on normaali aliryhmä $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
 - a) Määritä sivuluokka $(123)V$.
 - b) Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?

$$(12)V = (1324)V, \quad (12)V \cdot (13)V = (23)V, \quad ((123)V)^{-1} = (143)V$$

4. Osoita, että joukko

$$R = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ on pariton} \right\}$$

on renkaan \mathbb{Q} alirengas. Mitkä ovat renkaan R yksiköt?

5. Olkoon $f: G \rightarrow H$ ryhmähomomorfismi ja olkoon $g \in G$. Osoita, että alkion $f(g)$ kertaluku jakaa alkion g kertaluvun.