

Algebra I

Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos

Erilliskuulustelu

24.1.2013

1. Merkitään $H = \{5^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

a) Osoita, että H on ryhmän $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä

b) Näytä, että ryhmät (H, \cdot) ja $(\mathbb{Z}, +)$ ovat isomorfiset.

2. a) Jäännösluokkien joukossa \mathbb{Z}_6 voidaan määritellä laskutoimitus $*$ kaavalla

$$[a]_6 * [b]_6 = [a + b + 2]_6.$$

Laskutoimituksella on neutraalialkio. Mikä se on?

b) Osoita, että jäännösluokkien joukossa \mathbb{Z}_6 ei voi määritellä laskutoimitusta kaavalla

$$[a]_6 * [b]_6 = [|a| - 5b]_6.$$

3. Merkitään $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

a) Onko R kokonaisalue?

b) Joukko R^* koostuu kaikista renkaan R yksiköistä. Osoita, että $([2]_3, [2]_5)$ on joukon R^* alkio.

c) Joukko R^* on ryhmä, kun laskutoimituksena on kertolasku. Määritä ryhmän R^* alkion $a = ([1]_3, [2]_5)$ virittämä aliryhmä $\langle a \rangle$.

4. Tutkitaan ryhmää S_4 ja sen normaalia aliryhmää

$$V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

a) Määritä sivuluokka $(123)V$.

b) Mitkä seuraavista sivuluokista ovat samoja? Muista perustella vastauksesi.

$$(123)V, \quad (12)V \cdot (24)V, \quad ((23)V)^{-1}$$

c) Näytä, että tekijäryhmä S_4/V ei ole syklinen.