

Algebra I  
Helsingin yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
2. kurssikoe  
8.5.2013

Koeaika on kolme tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa.

1. (7 pistettä) Tutkitaan ryhmää  $G = \{1, a, b, c, d, e, f, g\}$ , jolla on oheinen kertotaulu. Ryhmällä  $G$  on normaali aliryhmä  $H = \{1, b\}$ .

$\cdot$	1	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
1	1	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
$a$	$a$	$b$	$c$	1	$g$	$d$	$e$	$f$
$b$	$b$	$c$	1	$a$	$f$	$g$	$d$	$e$
$c$	$c$	1	$a$	$b$	$e$	$f$	$g$	$d$
$d$	$d$	$e$	$f$	$g$	1	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$f$	$g$	$d$	$c$	1	$a$	$b$
$f$	$f$	$g$	$d$	$e$	$b$	$c$	1	$a$
$g$	$g$	$d$	$e$	$f$	$a$	$b$	$c$	1

- (a) Määritä aliryhmän  $H$  vasempien sivuluokkien joukko  $G/H$ .  
(b) Mitkä seuraavista laskuista on laskettu oikein?

$$aH \cdot dH = fH, \quad fH \cdot gH = cH$$

- (c) Määritä tekijäryhmän  $G/H$  alkion  $aH$  virittämä aliryhmä.

2. (3 pistettä) Olkoon  $G$  vaihdannainen ryhmä, jolla on normaali aliryhmä  $N$ . Osoita, että tekijäryhmä  $G/N$  on vaihdannainen.

3. (8 pistettä)

- (a) Mitkä seuraavista renkaan  $\mathbb{Z}_4[X]$  polynomeista ovat samoja?

$$P = 2X^2 - 1, \quad Q = 4X^3 + 2X^2 + 3, \quad R = X^2 + 1$$

- (b) Ratkaise kokonaisalueessa yhtälö  $x^2 + 2x + 1 = 0$ .  
(c) Onko renkaan  $\mathbb{Z}_7[X]$  alkio  $2X^3 - X - 3$  yksikkö?

4. (6 pistettä)

- (a) Oletetaan, että  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_5$  on ryhmähomomorfismi, jolle pätee  $f(1) = [4]_5$ . Määritä  $f(3)$ .  
(b) Voiko olla olemassa ryhmähomomorfismia  $\varphi$ , jonka lähtöjoukossa on kuusi alkioita ja kuvassa  $\text{Im } \varphi$  neljä alkioita?