Algebra I
Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
2.5.2012
2. kurssikoe

Koeaika on kolme tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa.

1. (4 pistettä)

   a) Etsi polynomin $P = X^3 + X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}_3[X]$ juuret.

   b) Onko P jaoton?

2. (4 pistettä) Kvaternioryhmällä $\mathbb{H} = \{1,\ -1,\ i,\ -i,\ j,\ -j,\ k,\ -k\}$ on seuraavanlainen kertotaulu:

	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

   Ryhmällä on normaali aliryhmä $N = \{1, -1\}$.

   a) Määritä aliryhmän N vasemmat sivuluokat.

   b) Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa? Perustele vastauksesi.

$$kN \cdot jN = iN, \qquad (jN)^{-1} = iN, \qquad (kN)^{-3} = kN$$

3. (4 pistettä) Kokonaisluku p on alkuluku, jos $p > 1$ ja p:n ainoat positiiviset tekijät ovat 1 ja p.

   Oletetaan, että $n \in \{1, 2, 3 \dots\}$. Osoita, että jos n ei ole alkuluku, niin rengas $\mathbb{Z}_n$ ei ole kokonaisalue.

KÄÄNNÄ!

4. (6 pistettä) Määritellään

$$f : 5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6, \quad f(5a) = [a]_6 \quad \text{kaikilla } a \in \mathbb{Z}.$$

a) Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.

b) Mikä on homomorfismin f ydin? Perustele vastauksesi huolellisesti.

c) Määritä isomorfismi $\overline{f}$, joka kuvauksesta f saadaan ryhmien homomorfialauseen avulla. Mikä on alkion $10 + 30\mathbb{Z}$ kuva tässä kuvauksessa?

d) Kuvaus f ei ole injektio. Kuvaile lyhyesti omin sanoin, miksi kuvaus $\overline{f}$ on injektio. Voit halutessasi piirtää avuksi kuvan. Tarkkaa todistusta ei tarvita.

5. (6 pistettä) Oletetaan, että ryhmällä G on aliryhmä H ja normaali aliryhmä N. Osoita, että $H \cap N \trianglelefteq H$. Onko $H \cap N$ välttämättä myös ryhmän G normaali aliryhmä?