Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe
4.5.2011

Laskimen tai taulukkokirjan käyttö ei ole sallittua.

1. Tarkastellaan jäännösluokkarengasta $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$.
   a) Määritä polynomin $X^2 + X \in \mathbb{Z}_{10}[X]$ juuret.
   b) Osoita, että joukko $I = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$ on renkaan $\mathbb{Z}_{10}$ ideaali.

2. Miten kuuluu Lagrangen lause? Selitä omin sanoin, miksi lause pitää paikkansa.

3. Tutkitaan neliön symmetriaryhmää D_8, jonka kertotaulu on esitetty alla. Ryhmällä on normaali aliryhmä $N = \{1, b\}$.
   a) Määritä tekijäryhmän D_8/N alkiot.
   b) Millainen on tekijäryhmän kertotaulu?
   c) Mitkä ovat tekijäryhmän alkioiden kertaluvut?

   Muista perustella vastauksesi.

	1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	a	b	c	d	e	f	g
a	a	b	c	1	g	d	e	f
b	b	c	1	a	f	g	d	e
c	c	1	a	b	e	f	g	d
d	d	e	f	g	1	a	b	c
e	e	f	g	d	c	1	a	b
f	f	g	d	e	b	c	1	a
g	g	d	e	f	a	b	c	1

4. Olkoon $f\colon R \to S$ rengashomomorfismi. Tiedetään, että kuva $\operatorname{Im} f \subset S$ on rengas. Mitkä seuraavista väitteistä pitävät paikkansa?
   a) Jos R on kunta, kuva $\operatorname{Im} f$ on kunta.
   b) Jos $\operatorname{Im} f$ on kokonaisalue, rengas R on kokonaisalue.