Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe
5.5.2010

Laskimen tai taulukkokirjan käyttö ei ole sallittua.

1. Oletetaan tunnetuksi, että $G = \{(1), (124), (142), (12), (14), (24)\} \subset S_4$ on ryhmä ja $N = \{(1), (124), (142)\}$ sen normaali aliryhmä.

   a) Mitkä ovat tekijäryhmän G/N alkiot?

   b) Kirjoita ryhmän G/N kertotaulu.

2. Määritellään $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että joukko

$$I = \{2a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

   on renkaan $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ ideaali. (Tehtävässä ei tarvitse osoittaa, että $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ on rengas.)

3. Olkoon $f : R \to S$ surjektiivinen rengashomomorfismi. Osoita, että jos R on vaihdannainen rengas, niin S on vaihdannainen rengas.

4. Määritellään

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{15}, \quad f(a) = [3a]_{15}.$$

   Oletetaan tunnetuksi, että f on ryhmähomomorfismi, kun laskutoimituksena molemmissa ryhmissä on yhteenlasku.

   a) Mikä on homomorfismin f ydin?

   b) Kuvaus f ei ole injektio. Kuvaile lyhyesti omin sanoin, miten siitä voidaan johtaa injektio ryhmien $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ja $\mathbb{Z}_{15}$ välille.

   c) Osoita, että ryhmä $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ on isomorfinen ryhmän

$$\{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}$$

   kanssa.