

**Algebra I**  
**Helsingin yliopisto**  
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Kurssikoe**  
**29.2.2012**

Koeaika on kolme tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta tai taulukkokirjaa.

1. (4 pistettä) Määritellään joukossa  $\mathbb{Q}$  laskutoimitus  $*$  seuraavasti:

$$a * b = -4ab \quad \text{kaikilla } a, b \in \mathbb{Q}.$$

Yhtälön oikean puolen kertolasku on rationaalilukujen tavallinen kertolasku.

Onko laskutoimitus liitännäinen? Entä vaihdannainen? Osoita, että laskutoimituksella on neutraalialkio. Mikä on alkion  $1/2$  käänteisalkio?

2. (4 pistettä)

a) Kirjoita permutaatio  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$  erillisten syklien tulona.

b) Määritä ryhmässä  $S_6$  tulo  $(1265) \cdot (132)(465)$ .

c) Onko joukko  $H = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(1) = 2\}$  ryhmän  $S_4$  aliryhmä?

3. (4 pistettä) Jäännösluokille modulo  $n$  voidaan määritellä kertolasku ehdolla

$$[a]_n \cdot [b]_n = [ab]_n, \quad \text{kun } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Joukko  $G = \{[1]_9, [2]_9, [4]_9, [5]_9, [7]_9, [8]_9\}$  on ryhmä, kun laskutoimituksena on jäännösluokkien kertolasku. Osoita, että joukko

$$H = \{[1]_9, [4]_9, [7]_9\}$$

on ryhmän  $G$  aliryhmä.

**KÄÄNNÄ!**

4. (6 pistettä) Ohessa on annettu erään ryhmän  $G = \{a, b, c, d, x, y\}$  kertotaulu.

$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$	$x$	$y$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$x$	$y$
$b$	$b$	$c$	$a$	$x$	$y$	$d$
$c$	$c$	$a$	$b$	$y$	$d$	$x$
$d$	$d$	$x$	$y$	$b$	$c$	$a$
$x$	$x$	$y$	$d$	$c$	$a$	$b$
$y$	$y$	$d$	$x$	$a$	$b$	$c$

- a) Määritä alkion  $b$  kertaluku.
- b) Määritä alkio  $c^{-4}$ .
- c) Onko ryhmä  $G$  syklinen?
5. (6 pistettä)
- a) Miten määritellään ryhmäisomorfismi?
- b) Olkoon  $G$  syklinen ryhmä. Oletetaan, että ryhmä  $H$  on isomorfinen ryhmän  $G$  kanssa. Osoita, että myös ryhmä  $H$  on syklinen.