

Algebra I  
 Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
 Kurssikoe  
 2.3.2011

**Laskimen tai taulukkokirjan käyttö ei ole sallittua.**

1. Olkoon  $G = \{a, b, c, d, e, f\}$  ryhmä, jolla on seuraava laskutoimitustaulu:

$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$a$	$f$	$d$	$a$	$e$	$b$	$c$
$b$	$e$	$c$	$b$	$f$	$a$	$d$
$c$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$d$	$b$	$a$	$d$	$c$	$f$	$e$
$e$	$d$	$f$	$e$	$a$	$c$	$b$
$f$	$c$	$e$	$f$	$b$	$d$	$a$

- a) Mikä on ryhmän  $G$  neutraalialkio?
  - b) Mitkä ovat alkioiden  $a$  ja  $f$  käänteisalkiot?
  - c) Osoita, että joukko  $H = \{a, c, f\}$  on ryhmän  $G$  aliryhmä.
2. Tutkitaan ryhmän  $S_6$  alkioita.
- a) Laske tulo  $(143)(25) \cdot (2543)$ .
  - b) Mikä on alkion  $(23)(615)$  käänteisalkio?
  - c) Määritä aliryhmä  $\langle (164) \rangle$ .
3. Olkoon  $(G, \cdot)$  ryhmä. Osoita, että on olemassa täsmälleen yksi alkio  $g \in G$ , jolle pätee  $g \cdot g = g$ . Perustele vastauksesi huolellisesti.
4. a) Mitä ovat sykliset ryhmät?
- b) Tiedetään, että  $A = \{(1), (123), (132)\}$  on ryhmän  $S_3$  aliryhmä. Joukko
- $$\mathbb{Z}_2 \times A = \{(a, \sigma) \mid a \in \mathbb{Z}_2, \sigma \in A\}$$
- on ryhmä, jos siinä määritellään laskutoimitus  $*$  pisteittäin:
- $$(a, \sigma) * (b, \tau) = (a + b, \sigma\tau)$$
- kaikilla  $(a, \sigma), (b, \tau) \in \mathbb{Z}_2 \times A$ . Onko ryhmä syklinen?