Algebra I
Helsingfors universitet, institutionen för matematik och statistik
Slutförhör
24.1.2013

1. Beteckna $H = \{5^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

   a) Visa att H är en undergrupp till gruppen $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

   b) Visa att grupperna $(H, \cdot)$ och $(\mathbb{Z}, +)$ är isomorfa.

2. a) I mängden $\mathbb{Z}_6$ av restklasser kan man definiera räkneoperationen $*$ med formeln
$$[a]_6 * [b]_6 = [a + b + 2]_6.$$
   Räkneoperationen har ett neutralelement. Vilket är neutralelementet?

   b) Visa att det inte är möjligt att definiera en räkneoperation i mängden $\mathbb{Z}_6$ av restklasser med formeln
$$[a]_6 * [b]_6 = [|a| - 5b]_6.$$

3. Beteckna $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

   a) Är R ett heltalsområde?

   b) Mängden R^* består av alla enhetselement till ringen R. Visa att $([2]_3, [2]_5)$ tillhör mängden R^*.

   c) Mängden R^* är en grupp, då multiplikationen utgör räkneoperationen. Bestäm den undergrupp $\langle a \rangle$ till gruppen R^* som genereras av elementet $a = ([1]_3, [2]_5)$.

4. Vi studerar gruppen S_4 och dess normala undergrupp
$$V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

   a) Bestäm sidoklassen $(123)V$.

   b) Vilka av följande sidoklasser är identiska? Kom ihåg att motivera ditt svar.
$$(123)V, \quad (12)V \cdot (24)V, \quad ((23)V)^{-1}$$

   c) Visa att faktorgruppen S_4/V inte är en cyklisk grupp.