Äärellisulotteinen lineaarialgebra.
24.01.13.
Aleksandr Pasharin.

1. Olkoon M R-moduli, missä R on ykköksellinen, vaihdannainen rengas.
   a) Määrittele duaalimoduli M^* ja osoita, että se todellakin on R-moduli.
   b) Oletetaan, että M on lisäksi äärellisulotteinen ja $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ on sen eräs kanta. Määrittele duaalikanta $\boldsymbol{\varepsilon}$ ja osoita, että se on M^*:n kanta.
2. Olkoot V, W äärellisulotteiset K-vektoriavaruudet. Olkoon $L\colon V \to W$ K-lineaarinen kuvaus. Osoita, että
$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L.$$
3. a) Selitä lyhyesti, mikä on Jordanin solu ja Jordanin normaali muoto. Kerro mitä Jordanin Lause väittää.
   b) Olkoon A $\mathbb{C}$-kertoiminen matriisi. Osoita, että A on similaarinen transpoosinsa A^T kanssa.
4. Olkoot V, W sisätuloavaruudet ja $L\colon V \to W$ lineaarinen. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen lineaarinen kuvaus $L^*\colon W \to V$, siten, että kaikilla $x \in V, y \in W$ pätee
$$\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^* y\rangle.$$