Äärellisulotteinen lineaarialgebra.
Kurssikoe 18.12.12.
Aleksandr Pasharin.

1. Olkoot M, N vapaat äärellisulotteiset R-modulit, missä R on ykkösellinen, vaihdannainen rengas. Olkoot $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ modulin M kanta ja $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ modulin N kanta. Olkoon $L\colon M \to N$ R-lineaarinen kuvaus.
   a) Määrittele duaalikuvaus $L^*\colon N^* \to M^*$ ja osoita, että se on R-lineaarinen.
   b) Olkoon $A = [L]_{\mathbf{f},\mathbf{e}}$. Osoita, että L^*:n matriisi vastaavien duaalikantojen suhteen on A^T.
2. Olkoon V äärellisulotteinen K-vektoriavaruus. Olkoon $L\colon V \to V$ operaattori ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sen erilaiset ominaisarvot. Osoita, että aliavaruuksien V_{λ_i}, $i = 1, \ldots, n$ summa on suora.
3. Laske molemman alla annetun matriisin karakteristinen polynomi, minimipolynomi ja ominaisarvot. Esitä matriisi sen jälkeen Jordanin normaalissa muodossa. Onko matriisi diagonalisoituva?
   a)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$
   b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
4. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-lineaarinen kuvaus ja olkoon sen matriisi standardin kannan suhteen
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$
   Varustetaan $\mathbb{R}^2$ tavallisella pistetulollaan $\cdot$.
   a) Mitä ehto(j)a A:n on toteuttavaa että L olisi diagonalisoituva jossakin ortonormaalissa kannassa?
   b) Oletetaan, että L on diagonalisoituva ortonormaalissa kannassa. Määritellään kuvaus $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kaavalla $F(x, y) = Lx \cdot y$. Osoita, että F on bilineaarinen ja symmetrinen. Osoita, että se on sisätulo $\mathbb{R}^2$:ssä jos ja vain jos $a > 0$ ja $\det A > 0$.