Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa 24.1.2013

1. Olkoon X geometrisesti jakautunut,

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - c)c^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

missä $c \in (0, 1)$ on vakio. Osoita, että X ei kuulu minkään jakauman vaikutuspiiriin maksimin suhteen.

2. Olkoot $X, X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia ja $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Olkoon muuttujan X kertymäfunktio F.

Oletetaan, että $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, missä $\alpha > 1$. Osoita, että

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{n\overline{F}(x)} = 1.$$

3. Olkoot $X, X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ja $M_n^{(2)}$ toiseksi suurin havainnoista $X_1, \ldots, X_n$. Olkoon muuttujan X kertymäfunktio F ja odotusarvo $\mu \in (0, \infty)$.

Oletetaan, että $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, missä $\alpha > 1$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(M_n^{(2)} > n\varepsilon \mid S_n > na) = 0.$$

Esitä perusteluksi riittävä kuvaus tapahtuman $\{S_n > na\}$ sisärakenteesta (ilman todistusta).