HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Äärellisten mallien teoria
Loppukoe, 13. 5. 2008

1. Esitä lyhyesti perustellen esimerkit äärellisen joukon
a) relaatiosta R, joka on refleksiivinen ja transitiivinen, mutta ei symmetrinen,
b) permutaatiosta f, jolla ei ole kiintopisteitä,
c) laskutoimituksesta $\cdot$, joka on liitännäinen, mutta ei vaihdannainen.

2. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ saman aakkoston malleja ja $k \in \mathbb{N}$. Määrittele, mitä tarkoittaa, että $\mathfrak{A} \cong^k \mathfrak{B}$ eli että $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat k muuttujan suhteen osittaisesti isomorfisia. Esitä esimerkki malleista, joille $\mathfrak{A} \cong^k \mathfrak{B}$, mutta $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$.

3. Osoita, että ensimmäisen kertaluvun logiikassa ei voi ilmaista, että kaksipaikkaisen relaatiosymbolin E tulkinta on ekvivalenssirelaatio, jossa on parillinen määrä ekvivalenssiluokkia.

4. Esitä Büchin lause ja todista siitä seuraava osa: Olkoon Σ äärellinen merkistö. Oletetaan, että invariantilla ekvivalenssirelaatiolla $\sim \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ on vain äärellisen monta ekvivalenssiluokkaa ja L on yhdiste joistakin näistä. Tällöin L on äärellisellä automaatilla tunnistettavissa.

5. Olkoot $\mathbb{G}$ ja $\mathbb{H}$ verkkoja sekä olkoon $k \in \mathbb{N}^*$. Oletetaan, että $\mathrm{card}(\mathbb{H}) = k$ ja $\mathbb{G}$ on k-laajennusaksiooman η_k malli. Todista, että $\mathbb{H}$ uppoaa verkkoon $\mathbb{G}$.

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Äärellisten mallien teoria
Loppukoe, 14. 8. 2008

1. Esitä lyhyesti perustellen esimerkit äärellisen joukon

a) relaatiosta R, joka on osittainen järjestys, mutta ei lineaarijärjestys,
b) relaatiosta R, joka on symmetrinen ja transitiivinen, mutta ei refleksiivinen
c) laskutoimituksesta $\cdot$, joka on vaihdannainen, mutta ei liitännäinen.

2. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ saman aakkoston malleja ja $k \in \mathbb{N}$. Määrittele, mitä tarkoittaa, että $\mathfrak{A} \cong_k \mathfrak{B}$ eli että $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat osittaisesti isomorfisia asteeseen k saakka. Esitä esimerkki malleista, joille $\mathfrak{A} \cong_k \mathfrak{B}$, mutta $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$.

3. Osoita, että äärellisen monen muuttujan logiikassa ei voi ilmaista, että äärellisen ekvivalenssirelaation ekvivalenssiluokat ovat yhtä mahtavia. Toisin sanoen ei ole olemassa lausetta $\varphi \in \mathrm{FVL}[\{E\}]$ (E kaksipaikkainen relaatiosymboli), jolle $\mathfrak{M} \models \varphi$, jos ja vain jos $E^{\mathfrak{M}}$ on ekvivalenssirelaatio ja relaation $E^{\mathfrak{M}}$ ekvivalenssiluokat ovat yhtä mahtavia, kun $\mathfrak{M}$ on $\{E\}$-malli.

4. Osoita, että monadisessa toisen kertaluvun logiikassa MSO voidaan ilmaista, että äärellisen linaarijärjestetyn joukon mahtavuus on kolmella jaollinen, ts. on olemassa sellainen $\varphi \in \mathrm{MSO}[\{\leq\}]$, että

$$\mathfrak{A} \models \varphi, \text{ jos ja vain jos } 3 \mid \mathrm{card}(\mathfrak{A}),$$

kun $\mathfrak{A}$ on äärellinen lineaarijärjestetty joukko.

5. Olkoon $p \in]0,1[$. Määritä

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\mathbb{G}_{n,p} \text{ on yhtenäinen}\}.$$